2025届高三二轮复习联考(一)

数 学 试 题

1.答卷前,考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上。

2.回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑;如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。

3.考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为 120 分钟,满分 150 分

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1.复数 z 在复平面上对应的点位于第四象限,则复数$\frac{z}{1-i}$在复平面上对应的点位于

A.第一或二象限或虚轴的正半轴上　　B.第二或三象限或实轴的负半轴上

C.第三或四象限或虚轴的负半轴上　　D.第一或四象限或实轴的正半轴上

2.已知全集$U=\mathbf{R}$,集合$A=\left\{x\left|y=\frac{1}{\sqrt{x+2}}+\log_2(1-x)\right.\right\}$,$B=\{x|0<x<3\}$,则$(\complement_U A)\cap B=$

A.$\{x|0<x<3\}$　　B.$\{x|1\leqslant x<3\}$

C.$\{x|-3<x\leqslant-2\}$　　D.$\{x|-2\leqslant x<0\}$

3.已知非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足:$|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=\frac{\sqrt{3}}{3}|\boldsymbol{a}|$,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\mathbf{0}$,则向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为

A.$\frac{\pi}{6}$　　B.$\frac{\pi}{4}$　　C.$\frac{\pi}{3}$　　D.$\frac{2\pi}{3}$

4.目前新能源汽车越来越受到人们的关注与喜爱,其中新能源汽车所配备电池的充电量及正常使用年限是人们购车时所要考虑的重要因素之一.某厂家生产的某一型号的新能源汽车配备了两组电池,且两组电池能否正常使用相互独立.电池的正常使用年限 ξ(单位:年)服从正态分布,$P(\xi>10)=0.8$,$P(\xi<30)=0.8$,则这两组电池在 20 年内都能正常使用的概率为

A.$\frac{4}{9}$　　B.$\frac{3}{4}$　　C.$\frac{1}{2}$　　D.$\frac{1}{4}$

5.已知$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,且 $B=\frac{\pi}{4}$,$a=2\sqrt{2}$,$b=2\sqrt{5}$,则 AC 边上的高 $h=$

A.$\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　B.$\frac{6\sqrt{5}}{5}$　　C.$\frac{5\sqrt{3}}{6}$　　D.$\frac{7\sqrt{6}}{8}$

6.函数 $f(x)=e^x-\frac{x^3}{\lambda}(\lambda>0)$在区间$(1,3)$上单调递增,则实数 λ 的取值范围是

A.$\left[\frac{12}{e^2},+\infty\right)$　　B.$[4e^2,+\infty)$　　C.$\left(-\infty,\frac{3}{4}e\right]$　　D.$\left(-\infty,\frac{5}{e^3}\right]$

7.已知 x,y 为正实数,$x+y=3$,则 $x+\frac{1}{x}+\frac{y^2-5}{y+3}$的最小值为

A.$\frac{1}{2}$　　B.$\frac{3}{2}$　　C.2　　D.$\frac{5}{2}$

8.已知函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(-x^2+x)$,若关于 x 的方程$[f(x)+\lambda-1][f(x)-4\lambda-1]+2\lambda^2+\lambda=0$ 有实根,则实数 λ 的取值范围是

A.$(-\infty,-1]$　　B.$\left[\frac{2}{9},+\infty\right)$

C.$(-\infty,0]\cup\left[\frac{4}{17},+\infty\right)$　　D.$\left(-\infty,\frac{2}{13}\right]\cup[2,+\infty)$

二、选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分。

9.下列说法正确的是

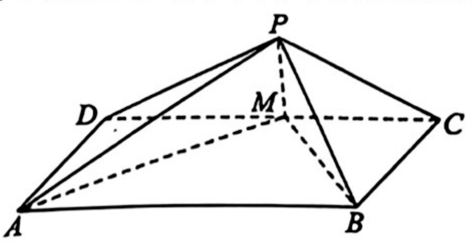
A.若 $a=\log_6\frac{1}{7}$,$b=\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{2}}$,$c=4^{0.5}$,则 $a<b<c$

B.命题"$\forall x\geqslant 0$,都有 $3^x\geqslant -3x+6$"的否定是"$\exists x<0$,使得 $3^x<-3x+6$"

C."$\frac{4}{x}<1$"是"$x>4$"的必要不充分条件

D.若函数 $f(x)=3^{x^2+6ax-3}$在区间$(-\infty,12)$上单调递减,则 $a\in(-\infty,-4]$

10.如图,已知底面为矩形的四棱锥 $P-ABCD$ 的顶点 P 的位置不确定,点 M 在棱 CD 上,且 $AM\perp BM$,平面 $PAM\perp$平面 $ABCD$,则下列结论正确的是



A.$PA\perp BM$

B.平面 $PAM\perp$平面 PBM

C.若 $AD=2$,$MD=2$,$PM=1$,且平面 $PBM\perp$平面 $ABCD$,则三棱锥 $P-ABM$ 的体积为$\frac{4}{3}$

D.存在某个位置,使平面 PAM 与平面 PBC 的交线与底面 $ABCD$ 平行

11.已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为 F_1,F_2,直线 $y=kx$ 与椭圆 C 交于 P,Q 两点,且$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$,$A$ 是椭圆C 上与 P,Q 不重合的点.

A.若$\frac{1}{|PF_1|}+\frac{1}{|PF_2|}=\frac{1}{c}$(其中 $c^2=a^2-b^2$),则椭圆 C 的离心率 $e=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

B.若 $a=3$,则$|PF_1|\cdot|PF_2|$的最大值为 9

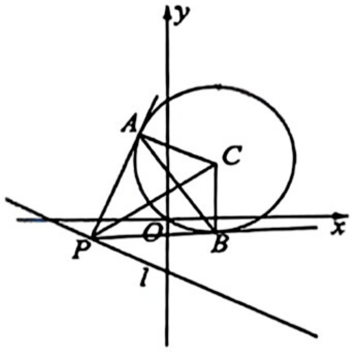
C.若 $a=3$,$b=\sqrt{2}$,则$|PF_1|\cdot|PF_2|=4$

D.若 $a=3$,直线 AP,AQ 的斜率之积为$-\frac{1}{3}$,则 $b=2$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12.已知函数 $f(x)=\sin\omega x+\sqrt{3}\cos\omega x(0<\omega<4)$，且函数图象过点$\left(\frac{\pi}{6},1\right)$，则函数 $f(x)$在区间$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$上的最小值为________.

13.如图，已知圆 C 的方程为$(x-1)^2+(y-1)^2=2$，且 P 是直线 $l:x+2y+2=0$ 上的一个动点，过点 P 作圆 C 的两条切线 PA，PB，切点分别为 A，B，则线段 AB 长度的最小值为________.



14.某班组织了国庆文艺晚会，从甲、乙、丙、丁等 7 个节目中选出 5 个节目进行演出，选出的 5 个节目要求相邻依次演出，且要求甲、乙、丙必选，且甲、乙相邻，但甲、乙均不与丙相邻，若丁被选中，丁必须排在前两位，则不同的演出顺序种数为________.（用数字作答）

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.(13 分)已知等差数列$\{a_n\}$的公差 $d>0$，其前 n 项和为 S_n，且 $a_1,a_6,2a_{18}$成等比数列，$S_{17}=153$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若 $b_n=a_n+1$，且$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n，求证：$2T_n>b_nb_{n-1}(n\geqslant 2)$.

16.(15 分)已知函数 $f(x)=x[1+(\ln x)^2]$.

(1)判断函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上是否存在极值点.若存在极值点，求出极值；若不存在极值点，说明理由.

(2)若函数 $g(x)=f(x)-\frac{ax^2}{2}$有三个极值点，求实数 a 的取值范围.

17.(15分)某农科所正在试验培育甲、乙两个品种的杂交水稻，水稻成熟后对每一株的米粒称重，重量达到规定的标准后，则该株水稻达标.在水稻收获后，通过科研人员的统计，甲品种的杂交水稻有$\frac{1}{3}$不达标，乙品种的杂交水稻有$\frac{1}{4}$不达标.

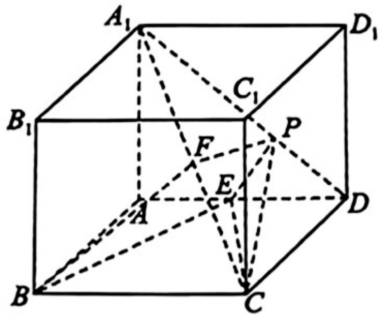
(1)若假设甲、乙两个品种的杂交水稻株数相等，一科研人员随机选取了一株水稻，称重后发现不达标，求该株水稻来自甲品种和乙品种的概率分别是多少；

(2)科研人员选取了8株水稻，其中甲品种5株，乙品种3株，再从中随机选取3株进行分析研究，这3株中来自乙品种水稻的有X株，求X的数学期望$E(X)$.

18.(17分)如图，正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，其侧棱长与底面边长都为2，E，F分别为AD，A_1C的中点，平面BEF与A_1D交于点P.

(1)确定点P在线段A_1D上的位置；

(2)求平面CEP与平面$BEPF$夹角的余弦值.



19.(17分)已知平行四边形$OADB$(O为坐标原点)的面积$S=1$，其中OB所在直线为$y=2x$，OA所在直线为$y=-2x$，动点D的轨迹为双曲线C，且双曲线C与y轴没有交点.

(1)求双曲线C的方程；

(2)设点$P(1,0)$，$Q(0,\lambda)$，$E(0,4-\lambda)$，直线PQ，PE与双曲线C分别交于点M，N(其中M，N不与点P重合)，G为直线MN上一点，且$PG\perp MN$，求$|OG|$的最大值.

2025届高三二轮复习联考(一)

数学参考答案及评分意见

1.D 【解析】设 $z=a+b\mathrm{i}$,$a,b\in\mathbf{R}$.∵复数 z 在复平面上对应的点位于第四象限,∴$a>0,b<0$.又$\frac{z}{1-\mathrm{i}}=\frac{a+b\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{1}{2}(a-b)+\frac{1}{2}(a+b)\mathrm{i}$,$a-b>0$,$a+b\in\mathbf{R}$,故复数$\frac{z}{1-\mathrm{i}}$在复平面上对应的点位于第一或四象限或实轴的正半轴上.

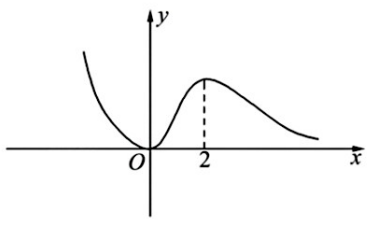
2.B 【解析】∵$A=\left\{x\,\middle|\,y=\frac{1}{\sqrt{x+2}}+\log_2(1-x)\right\}=\left\{x\,\middle|\,\begin{cases}x+2>0,\\1-x>0\end{cases}\right\}=\{x\mid -2<x<1\}$,∴$\complement_U A=\{x\mid x\leqslant -2$,或$x\geqslant 1\}$.∵ $B=\{x\mid 0<x<3\}$,∴$(\complement_U A)\cap B=\{x\mid 1\leqslant x<3\}$.

3.C 【解析】由 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\mathbf{0}$,可得 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,两边平方得 $\boldsymbol{a}^2=(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2$,即 $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$,∵ $|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=\frac{\sqrt{3}}{3}|\boldsymbol{a}|$,∴$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}^2$,∴$\cos\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|}=\frac{\frac{1}{2}\boldsymbol{b}^2}{\boldsymbol{b}^2}=\frac{1}{2}$,∴向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为$\frac{\pi}{3}$.

4.D 【解析】∵$P(\xi>10)=0.8$,$P(\xi<30)=0.8$,∴$P(\xi\leqslant 10)=1-0.8=0.2=P(\xi\geqslant 30)$,∴正态曲线的对称轴为$\xi=20$,则 $P(\xi\geqslant 20)=\frac{1}{2}$,即一组电池在 20 年内能正常使用的概率为$\frac{1}{2}$,∴这两组电池在 20 年内都能正常使用的概率为$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

5.B 【解析】∵$B=\frac{\pi}{4}$,$a=2\sqrt{2}$,$b=2\sqrt{5}$,∴由余弦定理得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$,即$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{(2\sqrt{2})^2+c^2-(2\sqrt{5})^2}{2\times 2\sqrt{2}\times c}$,解得$c=6$ 或 $c=-2$(舍去).又 $B=\frac{\pi}{4}$,∴ $\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$,由三角形的面积公式可得 $\frac{1}{2}bh=\frac{1}{2}ac\sin B$,即 $h=\frac{ac\sin B}{b}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$.

6.A 【解析】∵$f(x)=\mathrm{e}^x-\frac{x^3}{\lambda}$,∴$f'(x)=\mathrm{e}^x-\frac{3x^2}{\lambda}$,由题意可知 $f'(x)=\mathrm{e}^x-\frac{3x^2}{\lambda}\geqslant 0$ 在区间$(1,3)$上恒成立,且$\lambda>0$,∴$\lambda\geqslant 3x^2\mathrm{e}^{-x}$在区间$(1,3)$上恒成立.设 $g(x)=3x^2\mathrm{e}^{-x}$,则 $g'(x)=6x\mathrm{e}^{-x}-3x^2\mathrm{e}^{-x}=3x(2-x)\mathrm{e}^{-x}$,令$g'(x)>0$,得$0<x<2$;令 $g'(x)<0$,得 $x<0$ 或 $x>2$,∴$g(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减,在$(0,2)$上单调递增,在$(2,+\infty)$上单调递减.又当 $x\to-\infty$时,$g(x)\to+\infty$;当 $x\to+\infty$时,$g(x)\to 0$,作出 $g(x)$的大致图象如图所示,



∴$g(x)$在区间$(1,3)$上的最大值为 $g(2)=\frac{12}{\mathrm{e}^2}$,∴要使函数 $f(x)$在区间$(1,3)$上单调递增,则需 $\lambda\geqslant\frac{12}{\mathrm{e}^2}$,故实数 λ 的取值范围是$\left[\frac{12}{\mathrm{e}^2},+\infty\right)$.

7.B 【解析】∵x,y 为正实数,∴$x>0$,$y+3>3$,又 $x+y=3$,∴$x+\frac{1}{x}+\frac{y^2-5}{y+3}=x+\frac{1}{x}+\frac{y^2-9+4}{y+3}=x+\frac{1}{x}+y-3+\frac{4}{y+3}=\frac{1}{x}+\frac{4}{y+3}=\frac{1}{6}[x+(y+3)]\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y+3}\right)=\frac{1}{6}\left(5+\frac{y+3}{x}+\frac{4x}{y+3}\right)\geqslant\frac{1}{6}\left(5+2\sqrt{\frac{y+3}{x}\cdot\frac{4x}{y+3}}\right)=\frac{3}{2}$,当且仅当$\frac{y+3}{x}=\frac{4x}{y+3}$,即 $y+3=2x$,即 $x=2$,$y=1$ 时取等号,故当 $x=2$,$y=1$ 时,$x+\frac{1}{x}+\frac{y^2-5}{y+3}$取得最小

值$\frac{3}{2}$.

8.C 【解析】$\because -x^2+x>0$，$\therefore 0<x<1$，而$-x^2+x=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$，$\therefore$当$x=\frac{1}{2}$时，$-x^2+x$取到最大值$\frac{1}{4}$，

$\therefore f(x)=\log_{\frac{1}{4}}(-x^2+x)\geqslant\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{4}=1$.设$t=f(x)-1$，$t\geqslant 0$，则问题转化为关于$t$的方程$(t+\lambda)(t-4\lambda)+2\lambda^2+\lambda=0$，即$t^2-3\lambda t-2\lambda^2+\lambda=0$的根的问题.

设$g(t)=t^2-3\lambda t-2\lambda^2+\lambda$，$t\geqslant 0$，则$g(t)$的图象为开口向上的抛物线在$y$轴右侧部分(含$y$轴)，方程$g(t)=0$的判别式$\Delta=(-3\lambda)^2-4(-2\lambda^2+\lambda)=17\lambda^2-4\lambda$.

①当$\Delta=17\lambda^2-4\lambda=0$时，$\lambda=\frac{4}{17}$或$\lambda=0$，此时$t=\frac{3\lambda}{2}\geqslant 0$，则函数$g(t)$在$[0,+\infty)$有唯一零点；

②当$\Delta\neq 0$且$g(t)$在$[0,+\infty)$有唯一零点时，$g(0)=-2\lambda^2+\lambda<0$，解得$\lambda<0$或$\lambda>\frac{1}{2}$；

③当$g(t)$在$[0,+\infty)$有两个零点时，设这两个零点分别为t_1,t_2，则$\begin{cases}\Delta=17\lambda^2-4\lambda>0,\\ t_1+t_2=3\lambda>0,\\ t_1t_2=-2\lambda^2+\lambda\geqslant 0,\end{cases}$ 解得$\frac{4}{17}<\lambda\leqslant\frac{1}{2}$.

综合以上所得可知：$\lambda\leqslant 0$或$\lambda\geqslant\frac{4}{17}$.

9.ACD 【解析】对于A，$a=\log_6\frac{1}{7}<\log_6 1=0$，$0<b=\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{3}}<\left(\frac{1}{6}\right)^0=1$，$c=4^{0.5}>4^0=1$，$\therefore a<b<c$，故A正确；

对于B，“$\forall x\geqslant 0$，都有$3^x\geqslant -3x+6$”的否定是“$\exists x\geqslant 0$，使得$3^x<-3x+6$”，故B不正确；

对于C，当$\frac{4}{x}<1$时，$x<0$或$x>4$，$\therefore$“$\frac{4}{x}<1$”是“$x>4$”的必要不充分条件，故C正确；

对于D，设$g(x)=x^2+6ax-3$，则$f(x)=3^{g(x)}$，$\because g(x)$在$(-\infty,-3a)$上单调递减，$\therefore f(x)=3^{g(x)}$在$(-\infty,-3a)$上单调递减，$\therefore(-\infty,12)\subseteq(-\infty,-3a)$，$\therefore -3a\geqslant 12$，$\therefore a\leqslant -4$，故D正确.

10.ABC 【解析】对于A，$\because$平面$PAM\perp$平面$ABCD$，平面$PAM\cap$平面$ABCD=AM$，$AM\perp BM$，$BM\subset$平面$ABCD$，$\therefore BM\perp$平面PAM，又$PA\subset$平面PAM，$\therefore PA\perp BM$，故A正确；

对于B，由A知$BM\perp$平面PAM，又$BM\subset$平面PBM，$\therefore$平面$PAM\perp$平面PBM，故B正确；

对于C，在$\mathrm{Rt}\triangle ADM$中，$AD=2$，$MD=2$，$\therefore\angle MAD=\frac{\pi}{4}$，$\therefore\angle BAM=\frac{\pi}{2}-\angle MAD=\frac{\pi}{4}$，$\therefore AM=BM=2\sqrt{2}$，

$\therefore S_{\triangle AMB}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}=4$，$\because$平面$PBM\perp$平面$ABCD$，平面$PBM\cap$平面$ABCD=BM$，$AM\perp BM$，$AM\subset$平面$ABCD$，$\therefore AM\perp$平面$PBM$，又$PM\subset$平面$PBM$，$\therefore AM\perp PM$，同理可证$BM\perp PM$，$\therefore PM\perp$平面$AMB$，

而$PM=1$，$\therefore$三棱锥$P-ABM$的体积为$\frac{1}{3}\times 1\times 4=\frac{4}{3}$，故C正确；

对于D，设平面$PAM\cap$平面$PBC=l$，假设$l\parallel$底面$ABCD$，$\because$平面$ABCD\cap$平面$PAM=AM$，平面$ABCD\cap$平面$PBC=BC$，$\therefore l\parallel AM$，$l\parallel BC$，$\therefore AM\parallel BC$，则$M$与$D$重合，则$AD\perp BD$，显然不成立，则假设不成立，故D错误.

11.ABC 【解析】$\because\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，$\therefore PF_1\perp PF_2$，$\therefore|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2=4c^2$.

对于A，$\because\frac{1}{|PF_1|}+\frac{1}{|PF_2|}=\frac{|PF_1|+|PF_2|}{|PF_1|\cdot|PF_2|}=\frac{2a}{|PF_1|\cdot|PF_2|}=\frac{1}{c}$，$\therefore|PF_1|\cdot|PF_2|=2ac$.又$|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{(|PF_1|+|PF_2|)^2-(|PF_1|^2+|PF_2|^2)}{2}=\frac{4a^2-4c^2}{2}=2a^2-2c^2$，$\therefore 2a^2-2c^2=2ac$，$\therefore e^2+e-1=0$，

解得 $e=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$(负值舍去),故 A 正确.

对于 B,$\because a=3$,$\therefore |PF_1|\cdot|PF_2|\leqslant\frac{(|PF_1|+|PF_2|)^2}{4}=a^2=9$,当且仅当$|PF_1|=|PF_2|=3$时等号成立,故 B 正确.

对于 C,$\because a=3$,$b=\sqrt{2}$,$\therefore c^2=a^2-b^2=7$,$\therefore |PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{(|PF_1|+|PF_2|)^2-(|PF_1|^2+|PF_2|^2)}{2}=\frac{4a^2-4c^2}{2}=2a^2-2c^2=18-14=4$,故 C 正确.

对于 D,设直线 AP,AQ 的斜率分别为 k_{AP},k_{AQ},则 $k_{AP}k_{AQ}=-\frac{1}{3}$,设 $A(x,y)$,$P(x_0,y_0)$,则 $Q(-x_0,-y_0)$,$\because a=3$,$\therefore \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{b^2}=1$,$\frac{x_0^2}{9}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$,两式相减得$\frac{x^2-x_0^2}{9}=-\frac{y^2-y_0^2}{b^2}$,$\therefore \frac{y^2-y_0^2}{x^2-x_0^2}=-\frac{b^2}{9}$,而 $k_{AP}k_{AQ}=\frac{y-y_0}{x-x_0}\cdot\frac{y+y_0}{x+x_0}=\frac{y^2-y_0^2}{x^2-x_0^2}=-\frac{b^2}{9}=-\frac{1}{3}$,$\therefore b^2=3$,即 $b=\sqrt{3}$,故 D 不正确.

12.$-\sqrt{3}$ 【解析】$f(x)=\sin\omega x+\sqrt{3}\cos\omega x=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$,$\because$函数图象过点$\left(\frac{\pi}{6},1\right)$,$\therefore \sin\left(\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$,又 $0<\omega<4$,$\therefore \frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{3}<\pi$,$\therefore \frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$,解得 $\omega=3$,故 $f(x)=2\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)$.当$\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}$时,$\frac{5\pi}{6}\leqslant 3x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{4\pi}{3}$,$\therefore$函数 $f(x)$在区间$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$上的最小值为 $2\sin\frac{4\pi}{3}=-\sqrt{3}$.

13.$\frac{2\sqrt{30}}{5}$ 【解析】显然 P,A,C,B 四点共圆,且 PC 为该圆的一条直径.设这四点所在圆的圆心为 Q,而 P 在直线 l:$x+2y+2=0$ 上,设 $P(-2t-2,t)$,由 $C(1,1)$,可知 $Q\left(-\frac{2t+1}{2},\frac{t+1}{2}\right)$,又$|QC|^2=\left(\frac{2t+3}{2}\right)^2+\left(\frac{1-t}{2}\right)^2$,则圆 Q 的方程为$\left(x+\frac{2t+1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{t+1}{2}\right)^2=\left(\frac{2t+3}{2}\right)^2+\left(\frac{1-t}{2}\right)^2$,即 $x^2+y^2+(2t+1)x-(t+1)y-t-2=0$①,
又圆 C 的半径 $r=\sqrt{2}$,圆 C 的方程可化为 $x^2+y^2-2x-2y=0$②,
由①-②可得圆 C 与圆 Q 的公共弦 AB 所在直线的方程$(2t+3)x+(1-t)y-t-2=0$,点 C 到直线 AB 的距离 $d=\frac{2}{\sqrt{(2t+3)^2+(1-t)^2}}=\frac{2}{\sqrt{5t^2+10t+10}}$,$\therefore |AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{2-\frac{4}{5t^2+10t+10}}=2\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{2}{5t^2+10t+10}}=2\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{2}{5(t+1)^2+5}}$,$\therefore t=-1$ 时,线段 AB 的长度取得最小值$\frac{2\sqrt{30}}{5}$.

14.96 【解析】当丁没有被选中时,不同的演出顺序种数为 $C_3^2A_2^2A_3^3A_2^2=72$;当丁被选中且排在第一位时,不同的演出顺序种数为 $C_3^1A_2^2A_2^2=12$;当丁被选中且排在第二位时,不同的演出顺序种数为 $C_3^1A_2^2A_2^2=12$.综上,不同的演出顺序种数为 $72+12+12=96$.

15.(1)**解**:由题意,得 $S_{17}=\frac{17\times(a_1+a_{17})}{2}=17a_9=153$,解得 $a_9=9$. ………………………………… 2 分

又$\because a_1$,a_6,$2a_{18}$成等比数列,

$\therefore a_6^2=a_1\cdot 2a_{18}$,即$(9-3d)^2=2(9-8d)(9+9d)$,

解得 $d=1$ 或 $d=-\frac{9}{17}$(舍去,$d>0$), ………………………………… 6 分

$\therefore a_1=1$,

故数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=n$. ………………………………… 7 分

(2)**证明**:由(1)知 $a_n=n$,又 $b_n=a_n+1$,则 $b_n=n+1$,则 $b_{n-1}=n(n\geqslant 2)$,$T_n=\frac{n(2+n+1)}{2}=\frac{n(n+3)}{2}$,

$\therefore \frac{T_n}{b_nb_{n-1}}=\frac{n(n+3)}{2n(n+1)}=\frac{n+3}{2(n+1)}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)>\frac{1}{2}$. …………………………………… 12 分

$\because b_n=n+1>0$,

$\therefore 2T_n>b_nb_{n-1}(n\geqslant 2)$. ………………………………………………………………………… 13 分

16.**解**:(1)$\because f(x)=x[1+(\ln x)^2]=x(\ln x)^2+x,x>0$,

$\therefore f'(x)=(\ln x)^2+2\ln x+1=(\ln x+1)^2$,$\therefore f'(x)\geqslant 0$ 在$(0,+\infty)$上恒成立,当且仅当 $x=\frac{1}{\mathrm{e}}$时,取得等号,

$\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,

故函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上不存在极值点. ………………………………………………………… 4 分

(2)$\because g'(x)=(\ln x+1)^2-ax$,函数 $g(x)$有三个极值点,$\therefore g'(x)=0$ 有三个互不相等的正实数根.

由 $g'(x)=0$,得 $a=\frac{(\ln x+1)^2}{x}$.令 $h(x)=\frac{(\ln x+1)^2}{x}(x>0)$,

则问题转化为 $y=a$ 与 $h(x)=\frac{(\ln x+1)^2}{x}$的图象有三个交点,而 $h'(x)=\frac{1-(\ln x)^2}{x^2}$. ……………… 8 分

令 $h'(x)=0$,得 $x=\frac{1}{\mathrm{e}}$或 $x=\mathrm{e}$,则当 $x\in\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$时,$h'(x)<0$,$h(x)$单调递减;

当 $x\in\left(\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right)$时,$h'(x)>0$,$h(x)$单调递增;当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$时,$h'(x)<0$,$h(x)$单调递减, ………… 12 分

又$\because$当 $x\to 0$ 时,$h(x)\to+\infty$;当 $x\to+\infty$时,$h(x)\to 0$,且 $h\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=0$,$h(\mathrm{e})=\frac{4}{\mathrm{e}}$,

$\therefore 0<a<\frac{4}{\mathrm{e}}$,即实数 a 的取值范围为$\left(0,\frac{4}{\mathrm{e}}\right)$. …………………………………………………… 15 分

17.**解**:(1)从甲、乙两个品种的杂交水稻中任取一株,设事件 A 为“该株水稻来自甲品种”,事件 B 为“该株水稻不达标”,

则 $P(A)=\frac{1}{2}$,$P(\bar{A})=\frac{1}{2}$,$P(B|A)=\frac{1}{3}$,$P(B|\bar{A})=\frac{1}{4}$, ………………………………………………… 3 分

$\therefore P(B)=P(AB)+P(\bar{A}B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{7}{24}$,

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}{\frac{7}{24}}=\frac{4}{7},$$

$$P(\bar{A}|B)=\frac{P(\bar{A}B)}{P(B)}=\frac{P(\bar{A})P(B|\bar{A})}{P(B)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}{\frac{7}{24}}=\frac{3}{7},$$

即该株水稻来自甲品种和乙品种的概率分别是$\frac{4}{7}$,$\frac{3}{7}$. ……………………………………………………… 9 分

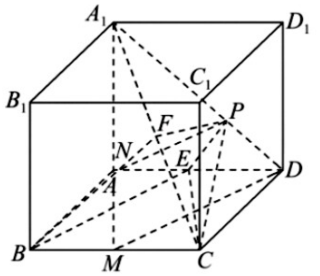
(2)依题意 X 的所有可能取值为 0,1,2,3,则

$P(X=0)=\frac{C_5^3C_3^0}{C_8^3}=\frac{5}{28}$,$P(X=1)=\frac{C_5^2C_3^1}{C_8^3}=\frac{15}{28}$,$P(X=2)=\frac{C_5^1C_3^2}{C_8^3}=\frac{15}{56}$,

$P(X=3)=\frac{C_5^0C_3^3}{C_8^3}=\frac{1}{56}$, ……………………………………………………………………………… 14 分

$\therefore X$ 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{5}{28}+1\times\frac{15}{28}+2\times\frac{15}{56}+3\times\frac{1}{56}=\frac{63}{56}=\frac{9}{8}$. ………………………………………… 15 分

18.**解**:(1)如图,设 BC 的中点为 M,连接 A_1M,记 $A_1M\cap BF=N$,连接 MD,NP.



由题意知四边形 $ABCD$ 为正方形,又 E 为 AD 的中点,$\therefore BM\parallel DE$,$BM=DE$,

$\therefore$ 四边形 $BMDE$ 为平行四边形,$\therefore MD\parallel BE$. ………………………………………… 3 分

又 $\because MD\not\subset$ 平面 $BEPF$,$BE\subset$ 平面 $BEPF$,$\therefore MD\parallel$ 平面 $BEPF$.

$\because MD\subset$ 平面 A_1MD,平面 $A_1MD\cap$ 平面 $BEPF=NP$,$\therefore NP\parallel MD$,

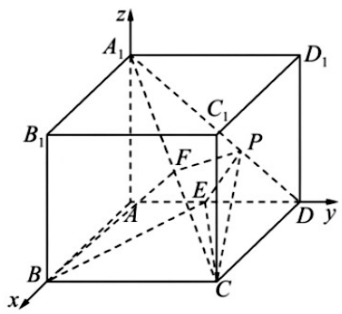
$\therefore\frac{A_1P}{PD}=\frac{A_1N}{NM}$.

又 $\because F$ 为 A_1C 的中点,$A_1M\cap BF=N$,$\therefore$ 点 N 为 $\triangle A_1BC$ 的重心,

$\therefore\frac{A_1N}{NM}=2$,$\therefore\frac{A_1P}{PD}=2$,

即点 P 为线段 A_1D 上靠近点 D 的三等分点. ………………………………………… 7 分

(2)以 A 为坐标原点,分别以直线 AB,AD,AA_1 为 x,y,z 轴建立如图所示的空间直角坐标系.



则 $A(0,0,0)$,$B(2,0,0)$,$D(0,2,0)$,$A_1(0,0,2)$,$F(1,1,1)$,$E(0,1,0)$,$C(2,2,0)$,

$\therefore\overrightarrow{BF}=(-1,1,1)$,$\overrightarrow{BE}=(-2,1,0)$,$\overrightarrow{A_1D}=(0,2,-2)$,$\overrightarrow{CE}=(-2,-1,0)$,

$\overrightarrow{CA_1}=(-2,-2,2)$. ………………………………………… 9 分

设平面 $BEPF$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则

$\begin{cases}\overrightarrow{BF}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\\overrightarrow{BE}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x+y+z=0,\\-2x+y=0,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}y=2x,\\z=-x,\end{cases}$ 令 $x=1$,则 $y=2$,$z=-1$,

$\therefore\boldsymbol{n}=(1,2,-1)$;

设平面 CEP 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(a,b,c)$,

由(1)知 $\overrightarrow{A_1P}=\frac{2}{3}\overrightarrow{A_1D}=\left(0,\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right)$,$\therefore\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CA_1}+\overrightarrow{A_1P}=\left(-2,-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$,

$\therefore\begin{cases}\overrightarrow{CE}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\\overrightarrow{CP}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2a-b=0,\\-2a-\frac{2}{3}b+\frac{2}{3}c=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=-2a,\\c=a,\end{cases}$ 令 $a=1$,则 $b=-2$,$c=1$,

$\therefore\boldsymbol{m}=(1,-2,1)$. ………………………………………… 14 分

设平面 CEP 与平面 $BEPF$ 的夹角为 α，则

$$\cos\alpha=|\cos\langle \boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\frac{|1\times1+2\times(-2)+(-1)\times1|}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\frac{2}{3},$$

即平面 CEP 与平面 $BEPF$ 夹角的余弦值为 $\frac{2}{3}$. ………………………………………………………… 17 分

19.**解**：(1)设点 $D(x_0,y_0)$，则点 D 到 OB 所在直线的距离为 $d=\frac{|2x_0-y_0|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|2x_0-y_0|}{\sqrt{5}}$，

且直线 DB 的方程为 $y=-2x+2x_0+y_0$.由方程组 $\begin{cases}y=2x,\\ y=-2x+2x_0+y_0,\end{cases}$

解得 $x_B=\frac{2x_0+y_0}{4}$，$y_B=\frac{2x_0+y_0}{2}$，$\therefore |OB|=\sqrt{x_B^2+y_B^2}=\frac{\sqrt{5}}{4}|2x_0+y_0|$， ………………………… 3 分

$\therefore$平行四边形 $OADB$（O 为坐标原点）的面积 $S=|OB|\cdot d=\frac{\sqrt{5}}{4}|2x_0+y_0|\cdot\frac{|2x_0-y_0|}{\sqrt{5}}=1$，整理得 $x_0^2-\frac{y_0^2}{4}=\pm1$.由于动点 D 的轨迹为双曲线 C，且双曲线 C 与 y 轴没有交点，

则双曲线 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$. ………………………………………………………………………… 6 分

(2)设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，由题意可知直线 MN 的斜率存在，

$\therefore$可设直线 MN：$y=mx+n$，由方程组 $\begin{cases}x^2-\frac{y^2}{4}=1,\\ y=mx+n,\end{cases}$

整理得 $(4-m^2)x^2-2mnx-(n^2+4)=0(m\neq\pm2)$，则 $\Delta=16(4+n^2-m^2)>0$，①

$x_1+x_2=-\frac{2mn}{m^2-4}$，$x_1x_2=\frac{n^2+4}{m^2-4}$.② ……………………………………………………………… 8 分

对于直线 PM：$y=\frac{y_1}{x_1-1}(x-1)$，令 $x=0$，得点 Q 的纵坐标 $\lambda=-\frac{y_1}{x_1-1}$，

同理可得点 E 的纵坐标 $4-\lambda=-\frac{y_2}{x_2-1}$，$\therefore\frac{y_1}{x_1-1}+\frac{y_2}{x_2-1}=-4$， ………………………………… 10 分

将 $y_1=mx_1+n$，$y_2=mx_2+n$ 代入上式整理，得：

$(2m+4)x_1x_2+(n-m-4)(x_1+x_2)+4-2n=0$，

将②代入得 $m^2+2mn+n^2+2m+2n=0$，整理得 $(m+n)(m+n+2)=0$， ………………………… 12 分

若 $m+n=0$，则直线 MN：$y=m(x-1)$，恒过点 $P(1,0)$，不合题意； …………………………………… 13 分

若 $m+n+2=0$，则直线 MN：$y=m(x-1)-2$，恒过点 $H(1,-2)$.

$\because$直线 MN 恒过点 $H(1,-2)$，且与双曲线 C：$x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 始终有两个交点，

$\therefore\begin{cases}\Delta=16(4+n^2-m^2)=16(8+4m)>0,\\ m\neq\pm2,\end{cases}$ 解得 $m>-2$ 且 $m\neq2$.

又$\because P(1,0)$，$PG\perp MN$，垂足为 G，

$\therefore$点 G 在以 PH 为直径的圆上， …………………………………………………………………………… 15 分

设 PH 的中点为 T，则圆心 $T(1,-1)$，半径为 1，

$\therefore |OG|\leqslant|OT|+1=\sqrt{2}+1$，当且仅当点 G 在线段 OT 的延长线上时，等号成立，

此时 $G\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2},-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，直线 MN 的斜率 $m=\sqrt{2}-1$，满足题意，故 $|OG|$ 的最大值为 $\sqrt{2}+1$. ………… 17 分