机密 ★ 考试结束前

温州市普通高中2025届高三第二次适应性考试

数学试题卷

2025.3

本试卷共4页，19小题，满分150分．考试用时120分钟．

注意事项：

1. 答卷前，考生务必用黑色字迹钢笔或签字笔将自己的姓名，准考证号填写在答题卷上，将条形码横贴在答题卷右上角“条形码粘贴处”．

2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卷上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试题卷上．

3. 非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卷各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液，不按以上要求作答的答案无效．

4. 考生必须保持答题卷的整洁，不要折叠，不要弄破．

选择题部分（共58分）

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．双曲线$\dfrac{y^2}{a^2}-x^2=1(a>0)$的一个焦点为$(0,2)$，则$a=$（ ▲ ）

A．$\sqrt{3}$　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C．3　　D．$\dfrac{1}{3}$

2．扇形的半径等于2，面积等于6，则它的圆心角等于（ ▲ ）

A．1　　B．$\dfrac{3}{2}$　　C．3　　D．6

3．已知随机变量$\xi\sim N(3,4)$，则“$a=3$”是“$P(\xi<a)=\dfrac{1}{2}$”的（ ▲ ）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

4．若向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{b}|=3$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-6$，则$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$上的投影向量是（ ▲ ）

A．$-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$　　B．$-\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}$　　C．$\dfrac{2}{3}\boldsymbol{b}$　　D．$-\dfrac{2}{3}\boldsymbol{b}$

5．已知数列$\{a_n\}$满足$a_n=\begin{cases}a_{n+1}-1,n\text{为奇数}\\2a_{n+1},n\text{为偶数}\end{cases}$，若$a_4\in[2,3]$，则$a_1$的取值范围是（ ▲ ）

A．$[2,4]$　　B．$[1,3]$　　C．$[3,5]$　　D．$[5,9]$

6. 某班级有30名男生和20名女生，现调查学生周末在家学习时长（单位：小时），得到男生样本数据的平均值为8，方差为2，女生样本数据的平均值为10.5，方差为0.75，则该班级全体学生周末在家学习时长的平均值$\overline{x}$和方差s^2的值分别是（ ▲ ）

A. $\overline{x}=9.5$，$s^2=1.5$　　B. $\overline{x}=9$，$s^2=1.5$

C. $\overline{x}=9.5$，$s^2=3$　　D. $\overline{x}=9$，$s^2=3$

7. 已知函数$f(x)=\sin x$，$g(x)=\cos x$，则两个函数的图象仅通过平移就可以重合的是（ ▲ ）

A. $y=f(x)-g(x)$与$y=f(x)$

B. $y=[f(x)]^2-[g(x)]^2$与$y=f(x)g(x)$

C. $y=f[f(x)]$与$y=f[g(x)]$

D. $y=f[f(x)]$与$y=g[f(x)]$

8. 一个圆台形的木块，上、下底面的半径分别为4和8，高为3，用它加工成一个与圆台等高的四棱台，棱台下底面为一边长等于9的矩形，且使其体积最大．现再从余下的四块木料中选择一块车削加工成一个球，则所得球的半径最大值是（ ▲ ）（加工过程中不计损耗）

A. $\dfrac{7}{10}$　　B. $\dfrac{3}{4}$　　C. 1　　D. $\sqrt{2}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 已知二项展开式$(1-x)^{2025}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2025}x^{2025}$，则（ ▲ ）

A. $a_0=1$　　B. $a_1+a_2+\cdots+a_{2025}=0$

C. $a_1+a_{2024}=0$　　D. $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{2024}=2^{2024}$

10. 在四棱锥$P-ABCD$中，E,F分别是AP,BC上的点，$\dfrac{AE}{EP}=\dfrac{BF}{FC}$，则下列条件可以确定$EF//$平面$PCD$的是（ ▲ ）

A. $AD//BC$　　B. $AB//CD$　　C. $BC//$平面PAD　　D. $CD//$平面PAB

11. 甲乙两人用《哪吒2》动漫卡牌玩游戏．游戏开局时桌上有n盒动漫卡牌，每个盒子上都标有盒内卡牌的数量，每盒卡牌的数量构成数组$(a_1,a_2,\ldots a_n)$，游戏规则如下：两人轮流抽牌，每人每次只能选择其中一盒并抽走至少一张卡牌，若轮到某人时无卡可抽，则该人输掉游戏．现由甲先抽，则下列开局中，能确保甲有必胜策略的是（ ▲ ）

A. $(1,3)$　　B. $(1,2,3)$　　C. $(3,3,6)$　　D. $(3,4,5)$

非选择题部分（共 92 分）

三、填空题：本大题共 3 小题，每题 5 分，共 15 分．把答案填在题中的横线上．

12. 若复数 $a^2-2a+a\mathrm{i}$ 是纯虚数，则实数 $a=$___▲___．

13. 已知 A 是抛物线 $y^2=4x$ 在第一象限上的点，F 是抛物线的焦点，$\angle AFO=60^\circ$（O 为坐标原点），则抛物线在 A 处切线的斜率是___▲___．

14. 函数 $f(x)$ 满足：

①$f(1)=\dfrac{2}{5}$；　　②$\forall x,y\in\mathbf{R}$，$2^x f(y)-2^y f(x)\ge(4^x-4^y)f(x)f(y)$．

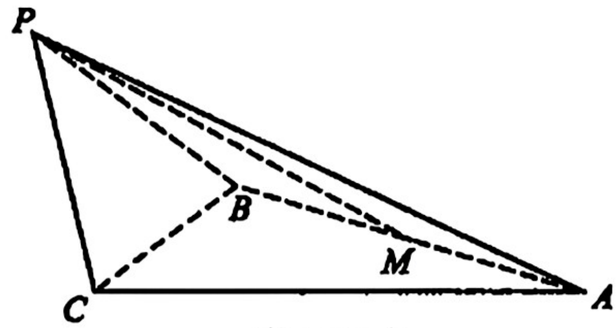
则 $f(x)$ 的最大值等于___▲___．

四、解答题：本大题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明．证明过程或演算步骤．

15. （本小题满分 13 分）如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，ΔPBC 是边长等于 2 的正三角形，$\angle ACB=90^\circ$，M 为 AB 的中点．

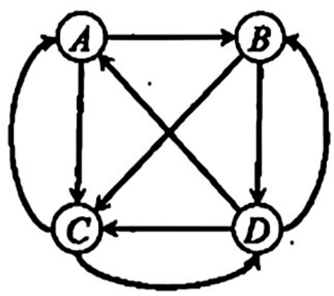
（1）求证：$BC\perp PM$；

（2）若 $AC=2\sqrt{3}$，$\cos\angle ACP=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，求点 M 到平面 PBC 的距离．



（第 15 题图）

16. （本小题满分 15 分）PageRank 算法是 Google 搜索引擎用来衡量网页重要性的一种经典算法．其核心思想是通过分析网页之间的链接关系，评估每个网页的相对重要性．假设一个小型的互联网由 A，B，C，D 四个网页组成，它们之间按图中的箭头方向等可能地单向链接，假设某用户从网页 A 开始浏览（记为第 1 次停留）．



（第 16 题图）

（1）求该用户第 3 次停留在网页 D 上的概率；

（2）某广告公司准备在网页 B，C 中选择一个投放广告，以用户前 4 次在该网页上停留的平均次数作为决策依据．试问该公司应该选择哪个网页？请说明理由．

17. （本小题满分 15 分）已知函数 $f(x)=\ln(x+1)+\dfrac{ax}{x+1}$（$a\in\mathbf{R}$）.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 上恰有一个零点，求 a 的取值范围；

（3）当 $a>0$ 时，解方程 $f'(x)-f(x)=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}-\ln\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

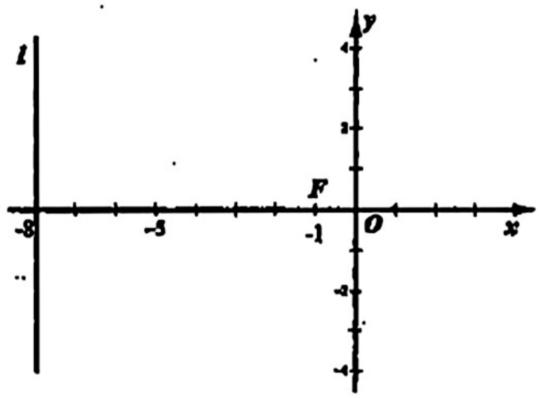
18. （本小题满分 17 分）在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $F(-1,0)$，P 是直线 $l:x=-8$ 右侧区域内的动点，P 到直线 l 与 y 轴的距离之和等于它到点 F 距离的 4 倍，记点 P 的轨迹为 E.

（1）求 E 的方程，并在图中画出该曲线；

（2）直线 l' 过点 F，与 E 交于 A,B 两点，

（i）若 $|AB|=\dfrac{9}{2}$，求直线 l' 的方程；

（ii）若 $|AB|=4$，T 是点 F 关于 y 轴的对称点，延长线段 AT 交 E 于点 C，延长线段 BT 交 E 于点 D，直线 CD 交 x 轴于点 $M(m,0)$，求 m 的最小值.



（第 18 题图）

19. （本小题满分 17 分）给定正数 t 与无穷数列 $\{a_n\}$，若存在 $N\in\mathbf{N}^*$，当 $m>n\geqslant N$ 时，都有 $|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_m|<t$，则称数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $P(t)$.

（1）求证：数列 $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$ 具有性质 $P(\dfrac{1}{2025})$；

（2）若无穷数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $P(1)$，求证：存在正数 M，使得 $|a_n|<M(n\in\mathbf{N}^*)$；

（3）若对任意正数 t，数列 $\{a_n\}$ 都具有性质 $P(t)$，则称 $\{a_n\}$ 为“S—数列”．若正项数列 $\{b_n\}$ 是“S—数列”，试判断数列 $\{e^{b_n}-1\}$ 是否也是“S—数列”，并证明你的结论.

（注：$e=2.718\cdots$）

温州市普通高中2025届高三第二次适应考试

数学参考答案及细则

一、选择题（本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
选项	A	C	C	D	B	D	C	C

二、选择题（本题共3小题，每小题6分，共18分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分）

题号	9	10	11
选项	ACD	BD	ACD

三、填空题（本题共3小题，每小题5分，共15分）

12. 2

13. $\sqrt{3}$

14. $\frac{1}{2}$

四、解答题（本题共5小题，共77分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

15.

（1）证明：作BC中点N，连接AN,PN，则有$AC\perp BC$，所以$NM\perp BC$，

又因为ΔPBC是正三角形，且N为BC中点，因此$PN\perp BC$，

从而$\begin{cases}PN\perp BC\\ NM\perp BC\\ PN\cap NM=N\\ PN,NM\subset 面PNM\end{cases}\Rightarrow BC\perp$平面$PNM$，所以$BC\perp PM$.

（2）由题，$\angle PCB=60^\circ$，　　设平面ACB与平面PBC夹角为θ，

由三射线定理$\cos\angle ACP=\cos\angle PCB\cos\angle ACB+\sin\angle PCB\sin\angle ACB\cos\theta$，解得$\cos\theta=-\frac{1}{2}$，即$\theta=120^\circ$，

设点M到平面PBC的距离为d，则$d=\sin\theta\cdot NM=\frac{3}{2}$.

16.

（1）$P=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

（2）$P(A_3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，$P(B_3)=0$，$P(C_3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，$P(D_3)=\frac{1}{2}$，

所以$P(B_4)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{8}+\frac{1}{6}=\frac{5}{24}$，$P(C_4)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{24}$，$P(B_1)=P(C_1)=0$，$P(B_2)=P(C_2)=\frac{1}{2}$，

所以$E(B)=\frac{1}{2}+\frac{5}{24}$，$E(C)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{5}{24}>E(B)$，故该公司应该选择$C$网页.

17.

（1）由题，$f'(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{a}{(x+1)^2}=\frac{x+1+a}{(x+1)^2}$，

由于分母$(x+1)^2>0$（对$x>-1$），故$f'(x)$的正负由分子$x+1+a$决定，记$x+1+a=0\Leftrightarrow x=-1-a$，

当$a\geq 0$时，对任意$x>-1$有$x+1>0$，故$x+1+a\geq x+1>0$，即$f'(x)>0$，$f(x)$在定义域内单调递增；

当$a<0$时，注意到$x=-1-a$是唯一使$f'(x)=0$的点，又观察到，若在区间$x\in(-1,-1-a)$内，由于$x+1<a$，

故$x+1+a<0$，即$f'(x)<0$；$x>-1-a$时，$x+1+a>0$，故$f'(x)>0$.

综上，当$a\geq 0$时，$f(x)$在 定义域内单调递增；

当$a<0$时，$f(x)$在$(-1,-1-a)$上单调递减，在$(-1-a,+\infty)$上单调递增

（2）由（1）知，当$a\geq 0$时，$f(x)$在定义域内单调递增，且注意到$f(0)=0$，因此$a\geq 0$时不合题意；

当$a<0$时，考虑到$f(0)=0$，为使$(-1,0)$内有零点，则极小值点小于零，即$-1-a<0\Rightarrow a>-1$，

结合$a<0$，则a的取值范围为$(-1,0)$.

（3）由题，$f'(x)-f(x)=\dfrac{-ax^2+(1-a)x+1+a}{(x+1)^2}-\ln(x+1)$，记上式为$g(x)$，

则$g'(x)=-\dfrac{(a+1)x+1+3a}{(x+1)^3}<0$，$g(x)$在定义域内单调递减，因此$g(x)=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}-\ln\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$，

仅有一个解，注意到待求方程$g(x)=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}-\ln\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}+\ln\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，

对$g(x)$中含a的部分单独考察，即$a\left(-x^2-x+1\right)$，其中关于x的多项式的解为$x_{1,2}=\dfrac{\pm\sqrt{5}-1}{2}$，

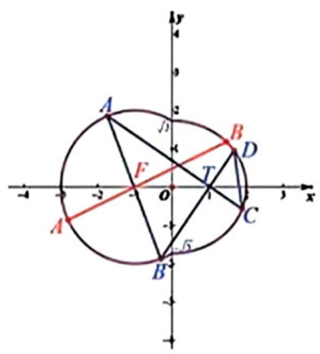
因此$x=x_{1,2}$时可消去a.

当$x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$时，有$g\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}+\ln\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，满足题意；

当$x=\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}$时，有$g\left(\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}\right)=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}+\ln\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，不符合题意；

综上，原方程的解为$x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

18.



（1）设$P(x,y)$，则有$x+8+|x|=4\sqrt{(x+1)^2+y^2}$，

当$x\geq 0$时，$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$；当$x<0$时，$(x+1)^2+y^2=4$，曲线如图所示.

（2）(i) 如图，$AF=2$，则$BF=\dfrac{5}{2}$.

设$B\left(2\cos\theta,\sqrt{3}\sin\theta\right)$，$BF^2=\dfrac{25}{4}=(2\cos\theta+1)^2+3\sin^2\theta$，

解得 $\cos\theta=\frac{1}{2}$，所以 $B\left(1,\pm\frac{3}{2}\right)$，所以 $k_{BF}=\frac{\pm\frac{3}{2}}{2}=\pm\frac{3}{4}$，

所以直线方程为 $l':y=\pm\frac{3}{4}(x+1)$.

（ii）由题意知，$T(1,0)$，且 $AT\perp BT$. 设 $CD:x=ty+m$，$C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，$T(1,0)$，

$3(ty+m)^2+4y^2-12=0\Rightarrow\left(3t^2+4\right)y^2+6tmy+3m^2-12=0$，

因为 $\overrightarrow{CT}=(1-x_1,-y_1)$，$\overrightarrow{DT}=(1-x_2,-y_2)$，

所以 $0=(1-x_1)(1-x_2)+y_1y_2=x_1x_2-x_1-x_2+1+y_1y_2=(ty_1+m)(ty_2+m)-ty_1-m-ty_2-m+1+y_1y_2$

$=\left(t^2+1\right)y_1y_2+(mt-t)(y_1+y_2)+m^2-2m+1$.

其中 $y_1y_2=\frac{3m^2-12}{3t^2+4}$，$y_1+y_2=-\frac{6tm}{3t^2+4}$，

所以 $\left(t^2+1\right)\left(3m^2-12\right)+(m-1)t\cdot(-6tm)+(m-1)^2\cdot\left(3t^2+4\right)=0$，

即 $3m^2t^2+3m^2-12t^2-12-6m^2t^2+6t^2m+3m^2t^2-6mt^2+3t^2+4m^2-8m+4=0$，

所以 $7m^2-9t^2-8-8m=0$，所以 $7m^2-8m-8=9t^2\geq0$，解得 $m\geq\frac{8+\sqrt{288}}{14}=\frac{4+6\sqrt{2}}{7}$.

（1）取 $N=11$，则当 $m>n\geq11$ 时，

$\left|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_m\right|=\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{2^m}<\frac{1}{2^n}\leq\frac{1}{2^{11}}<\frac{1}{2025}$，

所以数列 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ 具有性质 $P\left(\frac{1}{2025}\right)$.

（2）$\exists N\in N^*$，当 $m>n\geq N^*$ 时，都有 $\left|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_m\right|<1$，

当 $n>N$ 时，$a_n=\left(a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots a_n\right)-\left(a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots a_{n-1}\right)$，

所以 $|a_n|\leq\left|a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots a_n\right|+\left|a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots+a_{n-1}\right|<2$，

取 $M=\max\left\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_N|,2\right\}$，则 $|a_n|<M$.

（3）我们先证明：

1）$\forall x\in(0,1]$，恒有 $e^x\leq(e-1)x+1$，这由切线放缩易证.

2）$\exists N_1\in\mathbf{N}^*$，当 $n>N$ 时，恒有 $b_n<1$，即 $e^{b_n}\leq(e-1)\cdot b_n+1$.

若不然，$\forall N_1 \in \mathbf{N}^*$，$\exists n > N_1$，　使得 $b_n \geq 1$.

取 $N_1 = N$，则 $b_n < 1$，矛盾！（类似（2）中证明）

下证 $\left\{e^{b_n} - 1\right\}$ 也是“S—数列”.

$\forall t > 0$，$\exists N \geq \max\left\{N_1, N_2\right\}$，当 $m > n \geq N$ 时，

$\left|e^{b_{n+1}} - 1 + e^{b_{n+2}} - 1 + \cdots + e^{b_m} - 1\right| = e^{b_{n+1}} - 1 + e^{b_{n+2}} - 1 + \cdots + e^{b_m} - 1 \leq (e-1)\left(b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_m\right)$，

而由于 $\{b_n\}$ 是“S—数列”，取 $t' = \dfrac{1}{e-1}t$，则 $\exists N_2 \in \mathbf{N}^*$，

当 $m > n \geq N_2$ 时，有 $\left|b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_m\right| < t'$，

所以 $\left|e^{b_{n+1}} - 1 + \cdots + e^{b_m} - 1\right| \leq (e-1)\left(b_{n+1} + \cdots + b_m\right) < (e-1) \cdot \dfrac{1}{e-1}t = t$，

所以 $\left\{e^{b_n} - 1\right\}$ 也是“S—数列”.